Mecânica e Modelação Computacional

Resolução de alguns problemas em Mecânica do Fluidos pelo Método dos Elementos Finitos.

Paulo Rui Alves Fernandes

Dezembro de 2012

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Noção de Fluido

- Sólido
- Fluidos
    - Gases
    - Líquidos

- Fluido Ideal (ou perfeito) – é um fluido incompressível e sem viscosidade
- Fluido real ou viscoso – é um fluido com viscosidade finita e pode ou não ser incompressível.
- Fluido não viscoso – é um fluido sem viscosidade e que pode ou não ser incompressível.

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Noção de Fluido

• Um fluido viscoso é newtoniano se a viscosidade é constante, caso contrário a viscosidade é função do gradiente da velocidade.

• Nota: rever descrição material vs descrição espacial.

- Descrição Lagrangiana (material) - segue-se as partículas.
- Descrição Euleriana (espacial) – olha-se para uma região do espaço.

Equações Fundamentais

- Conservação da massa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$\vec{u}$ → velocidade

$$\vec{u} = (u, v)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

ρ → densidade (massa específica)

Em regime estacionário:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Equações Fundamentais

- Conservação do momento linear (fluidos incompressíveis):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}\right)$$

Em 2D:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

- Lei de Newton para a viscosidade:

$$\sigma_x = \tau_x - P \qquad \tau_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_y = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_y = \tau_y - P$$

$$\tau_{xy}$$

μ → viscosidade

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Equações Fundamentais

- Equações de Navier-Stokes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-P\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+f_x=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-P\right)+f_y=\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Com viscosidade nula

$$-\frac{\partial P}{\partial x}+f_x=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y}+f_y=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right.$$

Equações Fundamentais

- Conservação da energia.

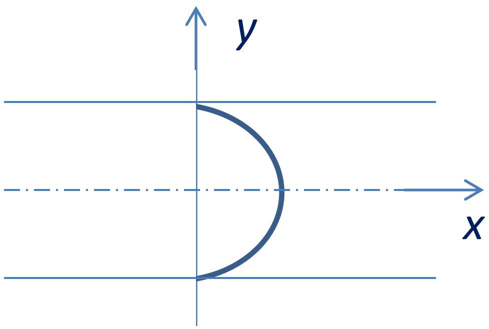
$$\rho c\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+q+\Phi$$

$$\Phi=\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

→ zero para fluidos não viscosos

Escoamento Laminar

- As equações fundamentais podem-se simplificar para determinadas condições, por exemplo para escoamento laminar entre duas paredes.



$$u = u(x, y) \qquad v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad u = u(y)$$

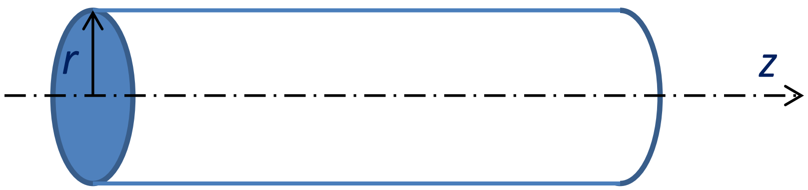
$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad P = P(x)$$

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Escoamento de Poiseuille

- No caso de um escoamento estacionário, incompressível de um fluido newtoniano dentro de um tubo circular de raio r, as equações ficam:



$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\rho c u\frac{\partial T}{\partial z} = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$$

$$u = u(r)$$

$$P = P(z)$$

$$T = T(r, z)$$

Escoamento de Poiseuille – Elementos Finitos

- O escoamento laminar em tubos, nas condições descritas acima pode ser traduzido pela seguinte equação diferencial de segunda ordem.

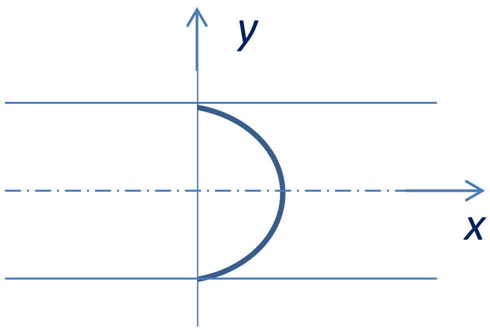
$$\begin{cases} \dfrac{d^2P}{dz^2} = 0 & \\ P = P^* & \text{C.F. essenciais} \\ \dfrac{dP}{dz} = \dfrac{8\mu}{\pi r^4} Q & \text{C.F. naturais} \end{cases}$$

Para um elemento finito de 2 graus de liberdade (2 nós)

$$\frac{\pi r^4}{8\mu h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

Escoamento Laminar – Elementos Finitos

- A equação diferencial é:



$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dP}{dx}$$

com $\dfrac{dP}{dx}$ dado

logo:

$$K_{ij}^e = \frac{\mu}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_i^e = \int_0^h \left(-\frac{dP}{dx}\right) \psi_i^e \, \mathrm{dy}$$

$$F_i^e = \begin{Bmatrix} \dfrac{q_0 h}{2} \\ \dfrac{q_0 h}{2} \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad q_0 = \left(-\frac{dP}{dx}\right)$$

$$Q_1 = -\left(\mu \frac{du}{dy}\right)\Big|_{x=A}$$

$$Q_2 = -\left(\mu \frac{du}{dy}\right)\Big|_{x=b}$$