1ª ÉPOCA 2012-2013 4JAN2012

MEC. MOD. COMPUTACIONAL - BIOMÉDICA

1

PROBLEMA 1

a)

FAZENDO O DIAGRAMA DE CORPO LIVRE PARA A BARRA RÍGIDA

$$\uparrow \sum F = 0 \qquad F_{BA} + F_{CD} - P = 0$$

$$\circlearrowleft \sum M_B = 0 \qquad F_{CD} \times 0.64 - P \times 0.2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{CD} = 1562,5\,N \qquad F_{AB} = 3437,5\,N$$

$P = 5000\,N$

LOGO A TENSÃO NAS BARRAS AB E CD SERÃO:

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{3437,5}{125 \times 10^{-6}} = 27,5 \times 10^6\,Pa = 27,5\,MPa$$

$$\sigma_{CD} = \frac{F_{CD}}{A_{CD}} = \frac{1562,5}{125 \times 10^{-6}} = 12,5 \times 10^6\,Pa = 12,5\,MPa$$

NOTAR QUE AMBAS AS BARRAS ESTÃO À TRACÇÃO

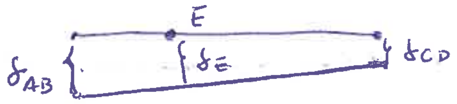
b) A deformada das barras é dada por:

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$ com $L = 0.36$ para as duas barras, $E = 75\,GPa$ e $A = 125\,mm^2$ também para as duas barras

LOGO
$$\delta_{AB} = \frac{F_{AB} L}{EA} = 1,32 \times 10^{-4}\,m = 0,132\,mm$$

e
$$\delta_{CD} = \frac{F_{CD} L}{EA} = 6,00 \times 10^{-5}\,m = 0,060\,mm$$

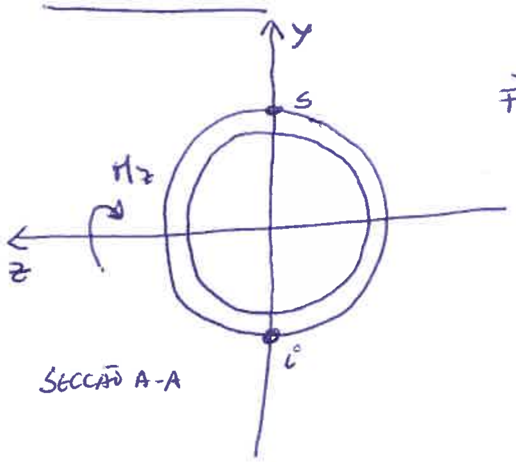
COMO A BARRA BEC É RÍGIDA

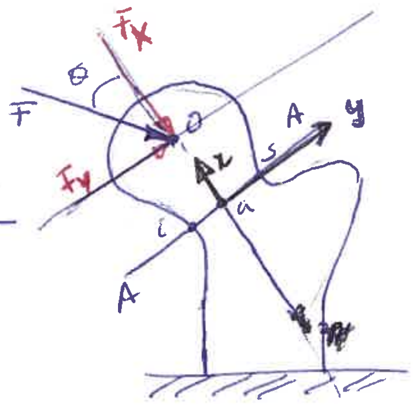


$$\frac{\delta_E - \delta_{CD}}{0.44} = \frac{\delta_{AB} - \delta_{CD}}{0.64}$$

$$\Rightarrow \delta_E = 0,1095\,mm$$

PROBLEMA 2





a) PARA CALCULAR O MOMENTO RESULTANTE NA SECÇÃO A-A PODEMOS CONSIDERAR A FORÇA APLICADA EM "O".
SÓ A COMPONENTE F_y ORIGINA MOMENTO NA SECÇÃO EM ESTUDO E SERÁ UM MOMENTO EM TORNO DE z (M_z) POSITIVO, ISTO É PROVOCARÁ TRACÇÃO EM i E COMPRESSÃO EM s

$$M_z = F_y \times L \qquad \text{com} \quad F_y = F\sin\theta = 2800 \times \sin 30^\circ = 1400\ N$$
$$L = 25\ mm = 25\times10^{-3}\ m$$

$$M_z = 1400 \times 25\times10^{-3} =$$
$$M_z = 35\ Nm$$

b) A TENSÃO NORMAL NOS PONTOS s e i TEM A CONTRIBUIÇÃO DO MOMENTO MAS TAMBÉM DA FORÇA AXIAL QUE É DADA PELA COMPONENTE F_x DA FORÇA APLICADA

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z\, y}{I}$$

com $P = F_x = F\cos\theta = 2800 \times \cos 30 = 2424,871\ N$ (COMPRESSÃO)

$$A = \pi \times (r_{ext}^2 - r_{int}^2) = \pi \times \left[(14\times10^{-3})^2 - (11,5\times10^{-3})^2\right] = 2,0028\times10^{-4}\ m^2$$

$$I = \frac{1}{4}\pi(r_{ext}^4 - r_{int}^4) = \frac{1}{4}\pi \times \left[(14\times10^{-3})^4 - (11,5\times10^{-3})^4\right] = 1,6435\times10^{-8}\ m^4$$

NO PONTO <u>s</u>

$$y = 14\times10^{-3} \Rightarrow (\sigma_x)_{PONTO\ s} = \frac{-2424,871}{2,0028\times10^{-4}} - \frac{35\times14\times10^{-3}}{1,6435\times10^{-8}} = -41,9\times10^{6}\ Pa = -41,9\ MPa$$

NO PONTO i

$$y = -14\times10^{-3} \Rightarrow (\sigma_x)_{PONTO\ i} = -\frac{2424,871}{2,0028\times10^{-4}} - \frac{35\times(-14\times10^{-3})}{1,6435\times10^{-8}} = 17,7\times10^{6}\ Pa = 17,7\ MPa$$

2-c) $\sigma_{adm} = 60\,MPa$

$d_{ext} = 28\,mm$

$d_{int} = ?$ A condição será $|\sigma| \leq \sigma_{adm}$

O caso mais desfavorável é quando a contribuição da força axial e do momento têm o mesmo sinal (em módulo, as duas contribuições somam)

Logo

$$+\frac{F_x}{\pi(r_{ext}^2 - r_{int}^2)} + \frac{M\, r_{ext}}{\frac{\pi}{4}(r_{ext}^4 - r_{int}^4)} \leq \sigma_{adm}$$

FAZENDO A SUBSTITUIÇÃO $r_{int}^2 = t$ FICAMOS COM UMA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU.

$$\frac{F_x}{\pi(r_{ext}^2 - t)} + \frac{M\, r_{ext}}{\frac{\pi}{4}(r_{ext}^4 - t^2)} \leq \sigma_{adm}$$

RESOLVENDO

$$\frac{\frac{1}{4} F_x (r_{ext}^2 + t) + M\, r_{ext}}{\frac{1}{4}\pi (r_{ext}^4 - t^2)} \leq \sigma_{adm}$$

$$\frac{1}{4} F_x r_{ext}^2 + \frac{1}{4} F_x t + M\, r_{ext} \leq \frac{1}{4}\pi\,\sigma_{adm} r_{ext}^4 - \frac{1}{4}\pi\,\sigma_{adm} t^2$$

$$\left(\frac{1}{4} F_x r_{ext}^2 + M\, r_{ext} - \frac{1}{4}\pi\,\sigma_{adm} r_{ext}^4\right) + \frac{1}{4} F_x t + \frac{1}{4}\pi\,\sigma_{adm} t^2 \leq 0$$

SUBSTITUINDO VALORES

$$4{,}7124 \times 10^7 t^2 + 6{,}0622 \times 10^2 t - 1{,}2015 \leq 0$$

$$\Rightarrow t \leq 1{,}5337 \times 10^{-4}$$

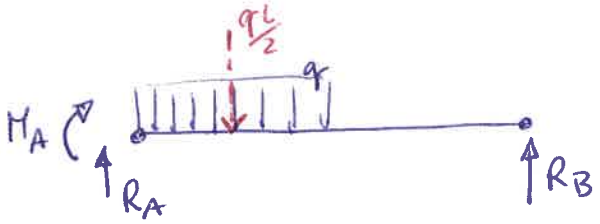
$$\Rightarrow r_{int} = \sqrt{t} \leq 0{,}01238\,m \Rightarrow 12{,}38\,mm$$

$$\Rightarrow d_{int} \leq 24{,}76\,mm$$

PROBLEMA 3

MMCom
2012/2013
1º época

a) A VIGA É ESTATICAMENTE INDETERMINADA, ISTO É AS EQUAÇÕES DA ESTATICA NÃO SÃO SUFICIENTES PARA CALCULAR AS REACÇÕES.
DE FACTO, FAZENDO O DIAGRAMA DE CORPO LIVRE PARA A VIGA,

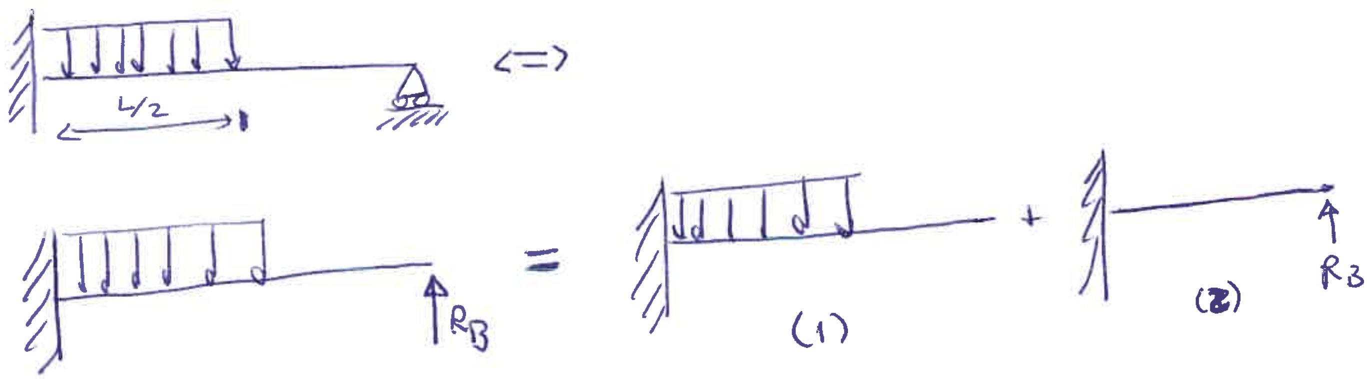


$$\uparrow \Sigma F = 0 \qquad R_A + R_B - \frac{qL}{2} = 0$$

$$\circlearrowleft \Sigma M = 0 \qquad R_B \times L - \frac{qL}{2} \times \frac{L}{4} - M_A = 0$$

TEMOS 3 INCÓGNITAS (R_A, R_B, M_A) PARA DUAS EQUAÇÕES.

UMA FORMA SIMPLES DE RESOLVER O PROBLEMA É UTILIZAR O MÉTODO DA SOBREPOSIÇÃO E AS TABELAS DE DEFORMADAS FORNECIDAS COM O FORMULÁRIO.



SABENDO QUE $y(x=L) = 0$; ISTO É A DEFORMADA NO PONTO B É NULA

LOGO

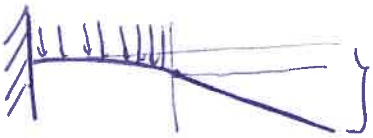
$$y^{(1)}(\text{em } B) + y^{(2)}(\text{em } B) = 0$$

PARA O PROBLEMA (2) A DEFORMADA EM B TIRA-SE DIRECTAMENTE DA TABELA,

$$y_B^{(2)} = \frac{R_B L^3}{3EI}$$

P3 a) (CONT)

PARA O PROBLEMA (1) É PRECISO NOTAR QUE A DEFORMAÇÃO SERÁ:



$$y_B = y\left(\tfrac{L}{2}\right) + \theta\left(\tfrac{L}{2}\right) \times \tfrac{L}{2}$$

ATÉ A $\frac{L}{2}$ A DEFORMADA É CALCULADA PELA TABELA PARA O CASO DE VIGA ENCASTRADA COM CARGA DISTRIBUÍDA (e comprimento $\frac{L}{2}$) A QUE SE SOMA O DESLOCAMENTO ADICIONAL DO PONTO B CORRESPONDENTE À PROJECÇÃO DA VIGA SEM DEFORMAÇÃO, ISTO É

$$y_B^{(1)} = y\left(\tfrac{L}{2}\right)\Big| + \theta\left(\tfrac{L}{2}\right) \times \tfrac{L}{2}$$

$$y_B^{(1)} = -\frac{q_0\left(\frac{L}{2}\right)^4}{8EI} - \frac{q_0\left(\frac{L}{2}\right)^3}{6EI} \times \frac{L}{2}$$

LOGO R_B CALCULA-SE PELA EQUAÇÃO

$$\frac{R_B L^3}{3EI} - \frac{q_0\left(\frac{L}{2}\right)^4}{8EI} - \frac{q_0\left(\frac{L}{2}\right)^4}{6EI} = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{7}{128} q_0 L \qquad \text{c/ } q_0 = 1000 \text{ e } L = 2$$

$$\underline{R_B = 109{,}375 \text{ N}}$$

E PORTANTO DAS EQS. DA ESTÁTICA VEM

$$R_A = \frac{1000 \times 2}{2} - 109{,}375 = \underline{890{,}625\text{N}}$$

e

$$M_A = 109{,}375 \times 2 - \frac{1000 \times 2}{2} \times \frac{2}{4}$$

$$M_A = \underline{-281{,}25 \text{ Nm}}$$

b) A EQUAÇÃO DA CURVA ELÁSTICA PODE TAMBÉM SER OBTIDA PELA SOBREPOSIÇÃO DOS DOIS CASOS.

PARA O CASO DOIS VEM DIRECTAMENTE DA TABELA E SERÁ

$$y^{(2)} = -\frac{R_B}{6EI}\left(x^3 - 3Lx^2\right)$$

VÁLIDA $0 < x < L$

c/ $R_B = 109{,}375\,N$

$L = 2m$

$EI = 70\times10^9 \times 5\times10^{-6}$

$= 3{,}5\times10^5\,Nm^2$

PARA O CASO (1) TEMOS QUE ENTRE 0 e $\frac{L}{2}$

$$y^{(1)} = -\frac{q_0}{24EI}\left(x^4 - 4\left(\frac{L}{2}\right)x^3 + 6\left(\frac{L}{2}\right)^2 x^2\right)$$

VÁLIDA $0 < x < \frac{L}{2}$

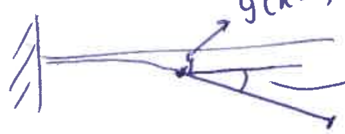
com $L = 2m$

$q_0 = 1000\,N/m$

$EI = 3{,}5\times10^5\,Nm^2$

E ENTRE $\frac{L}{2}$ e L É A

EQUAÇÃO DA RECTA:



$y(x=1)$ → dada pela eq. acima.

→ declive $\theta(x=1)$ do caso anterior.

$$y^{(1)} = -\frac{q_0(L/2)^4}{8EI} - \frac{q_0\left(L/2\right)^3}{6EI}\left(x - \frac{L}{2}\right) \quad \frac{L}{2} < x < L$$

com $L = 2m$

$EI = 3{,}5\times10^5$

$q_0 = 1000$

Hibbeler (?) comp(+)

Logo,

$$y_{TOTAL} = -\frac{R_B}{6EI}(x^3-3Lx^2) - \frac{q_0}{24EI}\left(x^4-4\left(\frac{L}{2}\right)x^3+6\left(\frac{L}{2}\right)^2x^2\right) \qquad 0<x<\frac{L}{2}$$

e

$$y_{TOTAL} = -\frac{R_B}{6EI}(x^3-3Lx^2) - \frac{q_0}{EI}\left[\frac{1}{8}\left(\frac{L}{2}\right)^4-\frac{1}{6}\left(\frac{L}{3}\right)^3\left(x-\frac{L}{2}\right)\right] \qquad \frac{L}{2}<x<L$$

com $L = 2\,m$

$R_B = 109,375\ N$

$q_0 = 1000\ N/m$

$EI = \cancel{3} 3,5\times10^5$

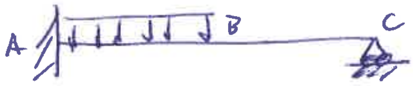
c) A deformada no ponto C é a deformada para $x = 1\,m$ e será

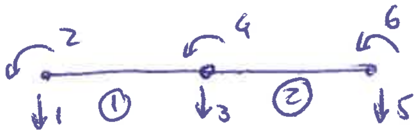
$$y_c = -\frac{109,375}{6\times3,5\times10^5}(1-6) - \frac{1000}{24\times3,5\times10^5}(1-4+6)$$

$$y_c = -9,67\times10^{-5}\,m = \cancel{\ldots} = -0,0967\,mm = 96,7\,\mu m$$

PROBLEMA 4

a)





→ MALHA DE ELEMENTOS FINITOS
ELEMENTOS = G.L. GLOBAIS.

MATRIZ CONECTIVIDADES

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6

MATRIZ RIGIDEZ ELEMENTO 1

$$K^{1} = \frac{2EI}{he}\begin{bmatrix} 6 & -3he & -6 & -3he \\ -3he & 2he^2 & 3he & he^2 \\ -6 & 3he & 6 & 3he \\ -3he & he^2 & 3he & 2he^2 \end{bmatrix}$$

c/ $he = 1$ e

$EI = 3{,}5 \times 10^5$

$$K^{1} = 7\times10^5\begin{bmatrix} 6 & -3 & -6 & -3 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 6 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

O ELEMENTO 2 TEM IGUAL COMPRIMENTO E IGUAL EI LOGO

$$K^{2} = K^{1}$$

então

$$K^G = 7\times10^5\begin{bmatrix} 6 & -3 & -6 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 6+6 & 3-3 & -6 & -3 \\ -3 & 1 & 3-3 & 2+2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$K^G_{11} = K^{1}_{11}$

$K^G_{12} = K^{1}_{12}$

$K^G_{13} = K^{1}_{13}$ $\quad K^G_{14} = K^{1}_{14}$

$K^G_{15} = 0$

$K^G_{16} = 0$

$K^G_{22} = K^{1}_{22}$ $\quad K^G_{23} = K^{1}_{23}$ $\quad K^G_{24} = K^{1}_{24}$

$K^G_{25} = 0$ $\quad K^G_{26} = 0$

$K^G_{33} = K^{1}_{33} + K^{2}_{11}$

$K^G_{34} = K^{1}_{34} + K^{2}_{12}$ $\quad K^G_{35} = K^{2}_{13}$

$K^G_{36} = K^{2}_{14}$

$$K^G = 7\times10^5\begin{bmatrix} 6 & -3 & -6 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 12 & 0 & -6 & -3 \\ -3 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$K^G_{44} = K^{1}_{44} + K^{2}_{22}$

$K^G_{45} = K^{2}_{23}$ $\quad K^G_{46} = K^{2}_{24}$

$K^G_{55} = K^{2}_{33}$ $\quad K^G_{56} = K^{2}_{44}$

$K^G_{66} = K^{2}_{44}$

P4 (CONT)

b)

ELEMENTO 1

CARGAS DISTRIBUIDAS

$$F^{①} = \frac{1000 \times h_e}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h_e \\ 6 \\ h_e \end{Bmatrix} \underset{h_e=1}{=} \frac{1000}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

O ELEMENTO 2 NÃO TEM CARGAS DISTRIBUIDAS LOGO

$$F^{②} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$F^{G} = \frac{1000}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_A \\ M_A \\ 0 \\ 0 \\ R_B \\ 0 \end{Bmatrix}$$

CONSIDERANDO TAMBÉM AS REACÇÕES.

c)

$$7 \times 10^5 \begin{bmatrix} 6 & -3 & -6 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 12 & 0 & -6 & -3 \\ -3 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = 83{,}33 \begin{Bmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

COMO $U_1 = U_2 = U_5 = 0$ CORTAM-SE AS LINHAS E COLUNAS,

E FICA

$$7 \times 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_6 \end{Bmatrix} = 83{,}33 \begin{Bmatrix} 6 \\ +1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 7 \times 10^5 \times 12\, U_3 - 7 \times 10^5 \times 3\, U_6 = 500 \\ 7 \times 10^5 \times 4\, U_4 - 7 \times 10^5\, U_6 = 83{,}33 \\ -7 \times 10^5 \times 3\, U_3 + 7 \times 10^5\, U_4 + 7 \times 10^5 \times 2\, U_6 = 0 \end{cases}$$

OU PARA SIMPLIFICAR A RESOLUÇÃO DO SISTEMA,

SE $A = \frac{7 \cdot 10^5}{83,33} U_3$ $B = \frac{7\times10^5}{83,33} U_4$ $C = \frac{7\times10^5}{83,33} U_6$

$$\begin{cases} 12A - 3C = 6 \\ 4B + C = 1 \\ -3A + B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \frac{13}{16} \\ B = -\frac{1}{16} \\ C = \frac{5}{4} \end{array}$$

Logo $U_3 = \frac{13}{16} \times \frac{83,33}{7\times10^5} = 9,67\times10^{-5}$ m

$$U_4 = -\frac{1}{16} \times \frac{83,33}{7\times10^5} = 7,44\times10^{-6} \text{ rad}$$

$$U_6 = \frac{5}{4} \times \frac{83,33}{7\times10^5} = 1,49\times10^{-4} \text{ rad}$$

NOTAR QUE U_3 É A DEFORMADA NO PONTO C E É IGUAL À CALCULADA NA ALINEA c) DO PROBLEMA ANTERIOR.

d)

$$M(x) = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$W = \sum_{i=1}^{4} U_i \phi_i$$

PARA O ELEMENTO 1

$$W_n = \phi_1 \times U_1 + \phi_2 U_2 + \phi_3 U_3 + \phi_4 U_4$$

e $\frac{d^2W_n}{dx^2} = \frac{d^2\phi_1}{dx^2}U_1 + \frac{d^2\phi_2}{dx^2}U_2 + \frac{d^2\phi_3}{dx^2}U_3 + \frac{d^2\phi_4}{dx^2}U_4$

$U_1 = U_2 = 0$

$$\phi_3 = 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \qquad \frac{d^2\phi_3}{dx^2} = \frac{6}{h^2} - \frac{12x}{h^3}$$

$$\phi_4 = -x\left[\left(\frac{x}{h}\right)^2 - \frac{x}{h}\right] \qquad \frac{d^2\phi_3}{dx^2} = -\frac{6x}{h^2} + \frac{2}{h}$$

$$M(x) = -EI\left[\left(\frac{6}{h^2} - \frac{12x}{h^3}\right) \times 9{,}67\times10^{-5} + \left(-\frac{6x}{h^2} + \frac{2}{h}\right)\times 7{,}44\times10^{-6}\right]$$

com $h = \frac{L}{2} = 1$

LOGO $M\left(\frac{L}{4}\right) = M\left(\frac{1}{2}\right) = -3{,}5\times10^{5}\left[\left(6 - 12\times\frac{1}{2}\right)\times 9{,}67\times10^{-5} + \left(-6\times\frac{1}{2} + 2\right)\times 7{,}44\times10^{-6}\right]$

$$= -3{,}5\times10^{5}\times(-7{,}44\times10^{-6}) = \underline{\underline{2{,}6\ Nm}}$$

O MOMENTO EM $\frac{L}{4}$ É $\underline{\underline{M = 2{,}6}}$ Nm