MECÂNICA E MODELAÇÃO COMPUTACIONAL – ENG. BIOMÉDICA

1ª ÉPOCA 2009/2010 23/01/2010

PROBLEMA I

a) TENSÃO ORIGINAL DO OSSO SAUDÁVEL:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

VERTEBRA COM OSSO PATOLÓGICO:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \boxed{P_1 + P_2 = P}$$

A deformação é igual (placa rígida mantém-se horizontal) na parte de osso saudável e na parte de osso patológico

$$\boxed{\delta_1 = \delta_2} \Rightarrow \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} \qquad \text{c/ } A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$$

$$E_2 = 0.08 E_1$$

$$L_1 = L_2 = L$$

$$\Rightarrow \frac{(P - P_2) L}{E_1 \times A/2} = \frac{P_2 L}{0.08 E_1 \times A/2}$$

$$\Rightarrow P_2 = 0.074 P \quad \text{e} \quad P_1 = P - P_2 = 0.926 P$$

Logo:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{0.926 P}{A/2} = 1.852 \frac{P}{A} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = 1.852 \sigma}$$ → osso saudável na vertebra patologica

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{0.074 P}{A/2} = 0.148 \frac{P}{A} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = 0.148 \sigma}$$ → osso patológico na vertebra patológica.

b) $$\delta_{\text{VERT. SAUDÁVEL}} = \frac{P L}{E_1 A} = \frac{L}{E_1} \sigma$$

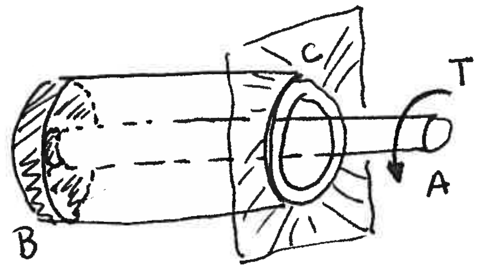
$$\delta_{\text{VERT. PATOLÓGICA}} = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1} = \frac{0.926 P L}{E_1 \times A/2} = 1.852 \frac{L}{E_1} \sigma \quad \left(= \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} \right)$$

c) O Eequivalente do osso homogéneo de rigidez equivalente ao patologico, teria que ser o E ~~que conduz~~ à mesma deformação para a carga aplicada. (P)

$$\frac{P L}{E_{eq.} A} = 1.852 \frac{L}{E_1} \sigma \Rightarrow \frac{1}{E_{eq}} = \frac{1.852}{E_1} \Rightarrow \boxed{E_{eq.} = 0.54 E_1}$$

PROBLEMA II

a) C.S. = 4 $\quad \tau_c = 198\ \text{MPa} \Rightarrow \tau_{adm} = \frac{198}{4} = 49.5\ \text{MPa}$



O sistema é estáticamente determinado logo o momento que actua no veio AB e no tubo BC É DETERMINADO UNICAMENTE POR EQUILÍBRIO ESTÁTICO.

$T_{VEIO} = T = 100\ \text{Nm}$

$T_{TUBO} = T_{VEIO} = T = 100\ \text{Nm}$

NOTA: A ANÁLISE É SEMELHANTE A SEGUINTE SITUAÇÃO

$\tau = \frac{Tc}{J}$ LOGO

$\frac{T_{TUBO} \times r_{ext}}{J_{TUBO}} \leq \tau_{adm}$ e $J_{TUBO} = \frac{1}{2}\pi\left(r_{ext}^4 - r_{int}^4\right)$

e neste caso $r_{ext} = 1.25\, r_{int}$

$$\Rightarrow \frac{T_{TUBO} \times r_{ext}}{\frac{1}{2}\pi\left(r_{ext}^4 - \frac{r_{ext}^4}{1.25^4}\right)} \leq \tau_{adm}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{TUBO}\ r_{ext}}{\frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1}{1.25^4}\right) r_{ext}^4} \leq \tau_{adm} \Rightarrow r_{ext} \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0.9274 \times \tau_{adm}}}$$

$r_{ext} \geq 12{,}96 \times 10^{-3}\ \text{m}$

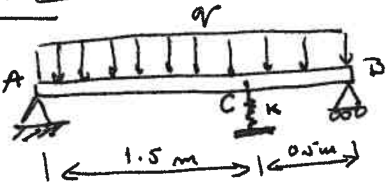
$d_{ext} \geq \underline{\underline{25{,}92 \times 10^{-3}\ \text{m}}}$

b) $\phi_A = \phi_{A/B} + \phi_{B/C} + \phi_C$ com $\phi_B = 0$ (extremidade fixa)

$$\phi_A = \frac{T \times L_{VEIO}}{J_{VEIO} \times G_{VEIO}} + \frac{T \times L_{TUBO}}{J_{TUBO} \times G_{TUBO}} = \frac{100 \times 0.4}{\frac{1}{2}\pi(8\times10^{-3})^4 \times 28 \times 10^9} + \frac{100 \times 0.2}{\frac{1}{2}\pi\left((15\times10^{-3})^4 - (12\times10^{-3})^4\right) \times 28\times10^9}$$

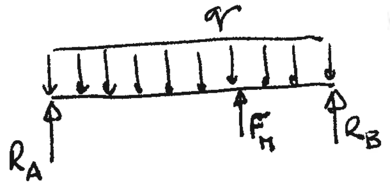
$\phi_A = 0.222 + 0.015 = 0.237\ \text{rad} \qquad \underline{\underline{\phi_A = 13{,}59^\circ}}$

PROBLEMA III



$E = 70\,GPa$
$I = 5 \times 10^{-6}\,m^4$
$K = 2 \times 10^5\,N/m$
$q = 1000\,N/m$
$L = 2\,m$

a) Para determinar as reacções faz-se o diagrama de corpo livre da viga.



$\uparrow \sum F = 0 \qquad R_A + R_B + F_M - qL = 0$

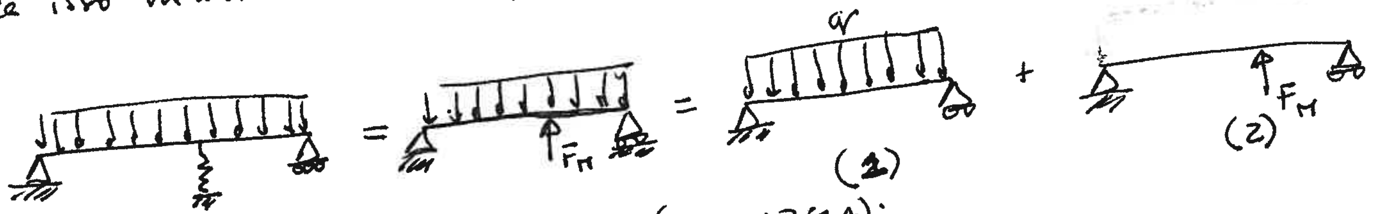
(a) $\boxed{R_A + R_B + F_M = 2000}$

$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \qquad F_M \times 1.5 + R_B \times 2 - qL \times 1 = 0$

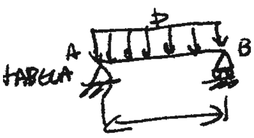
(b) $\boxed{2R_B + 1.5\,F_M = 2000}$

2 eq. 3 incog.
Estaticamente indeterminad

É necessário informação de deformação, para isso vamos utilizar o Método de sobreposição.



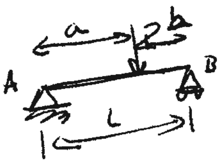
Para o PROBLEMA (1) a deformada é (VER TABELA):



$$y_1 = -\frac{p}{24EI}\left(x^4 - 2Lx^3 + L^3 x\right)$$

no nosso caso $p = q = 1000\,N/m$; $E = 70\,GPa$; $I = 5 \times 10^{-6}\,m^4$; $L = 2\,m$

Para o PROBLEMA (2) a deformada é (VER TABELA)



no ponto de aplicação de carga: $y_2 = -\dfrac{Pa^2 b^2}{3EIL}$

no nosso caso: $P = -F_M$; $a = 1.5\,m$; $b = 0.5\,m$; $L = 2\,m$

A relação de deformação que temos de observar é:

$$y_1(c) + y_2(c) = \text{deformação da mola.}$$

A def. de mola é $x = -\dfrac{F_M}{K}$

Substituindo valores temos

$$y_1(c) = y_1(1.5) = -0.424 \times 10^{-3}\,m$$

$$y_2(c) = y_2(1.5) = -\frac{-F_M \times 1.5^2 \times 0.5^2}{(3 \times 70 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6} \times 2)} = 0.267 \times 10^{-6} \cdot F_M$$

Então:

$$-0.424\times10^{-3} + 0.267\times10^{-6}F_M = -\frac{F_M}{2\times10^5}$$

$$\Rightarrow F_M = 80.5\,N$$

Substituindo agora nas equações da estática (a) e (b):

$$R_B = 936,625\,N \quad e \quad R_A = 979,875\,N$$

---

b) Para determinar a curva elástica podemos utilizar o princípio de sobreposição e utilizar as tabelas:

$$y_1(x) = -\frac{q}{24EI}\left(x^4 - 2Lx^3 + L^3x\right)$$

$L = 2m$
$b = 0.5$
$F_M = 80.5\ N$
$q = 1000\ N/m$
$E = 70\,GPa$
$I = 5\times10^{-6}m^4$

e $$y_2^{AC}(x) = \frac{-F_M b}{6EIL}\left(x^3 - (L^2 - b^2)x\right)$$

$$y_{AC}(x) = -\frac{1}{24EI}\left[\left(1000x^4 - 4000x^3 + 8000x\right) + \left(80.5x^3 - 301.875x\right)\right]$$

$$y_{AC}(x) = -1.19\times10^{-4}x^4 + 4.666\times10^{-4}x^3 - 9.164\times10^{-4}x$$

---

c) A deformada máxima encontra-se para $\theta = \frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy_{AC}}{dx} = -0.476\times10^{-3}x^3 + 1.3998\times10^{-3}x^2 - 9.164\times10^{-4} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0.994 \quad e \quad y_{máx} = 0.568\times10^{-3}\,m = \underline{0.568\,mm}$$

Nota: $x = 0.994$ é a única das três soluções da equação que está no domínio da viga.

PROBLEMA IV

a) A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UM ELEMENTO DE BARRA É:

$$K = \frac{EA}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo $$K^{(1)} = \frac{EA_1}{L/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2E}{L}\begin{bmatrix} A_1 & -A_1 \\ -A_1 & A_1 \end{bmatrix}.$$

e $$K^{(2)} = \frac{EA_2}{L/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2E}{L}\begin{bmatrix} A_2 & -A_2 \\ -A_2 & A_2 \end{bmatrix}$$

A MATRIZ DE CONECTIVIDADES É:

	1	2
1	1	2
2	2	3

$K^G_{11} = K^{(1)}_{11}$ $\quad K^G_{12} = K^{(1)}_{12}$ $\quad K^G_{13} = 0$

$K^G_{22} = K^{(1)}_{22} + K^{(2)}_{11}$ $\quad K^G_{23} = K^{(2)}_{12}$

$K^G_{33} = K^{(2)}_{22}$

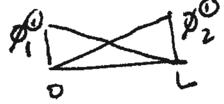
então: $$K^G = \frac{2E}{L}\begin{bmatrix} A_1 & -A_1 & 0 \\ -A_1 & A_1+A_2 & -A_2 \\ 0 & -A_2 & A_2 \end{bmatrix}$$

O vector de forças é $F^G = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$ uma vez que não há cargas distribuídas.

b) $$\frac{2E}{L}\begin{bmatrix} A_1 & -A_1 & 0 \\ -A_1 & A_1+A_2 & -A_2 \\ 0 & -A_2 & A_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overset{=0}{u_1} \\ u_2 \\ \underset{=0}{u_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_A \\ 0 \\ R_B \end{Bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{2E(A_1+A_2)}{L}u_2 = P \Longrightarrow u_2 = \frac{PL}{2E(A_1+A_2)}$$

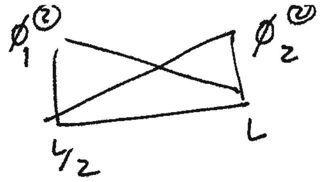
Para determinar o campo de deslocamentos $u(x)$ temos de ter as funções de base dos elementos 1 e 2

ELEMENTO 1: 

$\Longrightarrow \phi_1^{(1)} = -\frac{2}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right)$; $\boxed{\phi_2^{(1)} = \frac{2x}{L}}$

$$\boxed{\phi_1^{(1)} = 1 - \frac{2x}{L}}$$

ELEMENTO 2



$$\phi_1^{(2)} = 2 - \frac{2}{L}x$$

$$\phi_2^{(2)} = 1 + \frac{2x}{L}$$

LOGO

$$u(x) = \begin{cases} u^{(1)}(x) = \phi_1^{(1)} u_1 + \phi_2^{(1)} u_2 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ u^{(2)}(x) = \phi_1^{(2)} u_2 + \phi_2^{(2)} u_3 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} u^{(1)}(x) = \frac{PL}{2E(A_1+A_2)} \times \frac{2x}{L} & 0 < x < \frac{L}{2} \\ u^{2}(x) = \frac{PL}{2E(A_1+A_2)} \left(2 - \frac{2}{L}x\right) & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} u^{(1)}(x) = \frac{P}{E(A_1+A_2} x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ u^{(2)}(x) = -\frac{P}{E(A_1+A_2)} x & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

---

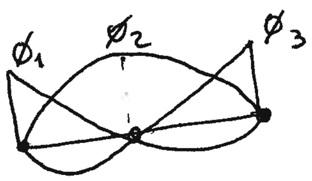
c) As forcas são

(ELEMENTO 1) $F_{AC} = EA_1 \frac{du^{(1)}}{dx} = EA_1 \frac{P}{E(A_1+A_2)} = \frac{PA_1}{(A_1+A_2)}$

(ELEMENTO 2) $F_{CB} = EA_2 \frac{du^{(2)}}{dx} = EA_2 \frac{P}{E(A_1+A_2)} = -\frac{PA_2}{(A_1+A_2)}$

---

d1)



As funções de base para o elemento de 3 nós são:

$$\phi_1 = \frac{(x-\frac{L}{2})(x-L)}{(0-\frac{L}{2})(0-L)} = \frac{2}{L^2}\left(x - \frac{L}{2}\right)(x-L)$$

$$\phi_2 = \frac{(x-0)(x-L)}{(\frac{L}{2}-0)(\frac{L}{2}-L)} = -\frac{4}{L^2} x(x-L)$$

$$\phi_3 = \frac{(x-0)(x-\frac{L}{2})}{(L-0)(L-\frac{L}{2})} = \frac{2}{L^2} x\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

d2) $$K_{ij} = \int_0^L E\,A(x)\,\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\,dx$$

$$K_{11} = \int_0^{L/2} E A_1 \frac{d\phi_1}{dx}\frac{d\phi_1}{dx}\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} E A_2 \frac{d\phi_1}{dx}\frac{d\phi_1}{dx}\,dx$$

$$\frac{d\phi_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2}{L^2} - \frac{3}{L}x + 1\right) = \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}$$

$$K_{11} = EA_1 \int_0^{L/2}\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)dx + EA_2\int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)\left(\frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}\right)dx$$

(...)

$$K_{11} = \frac{E}{6L}\left(13A_1 + A_2\right)$$

---

d3) $$\frac{E}{6L}\begin{bmatrix} 13A_1 + A_2 & -14A_1 - 2A_2 & A_1 + A_2 \\ -14A_1 - 2A_2 & 16A_1 + 16A_2 & -2A_1 - 14A_2 \\ A_1 + A_2 & -2A_1 - 14A_2 & A_1 + 13A_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^{=0} \\ u_2 \\ u_3^{=0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_A \\ P \\ R_A \end{Bmatrix}$$

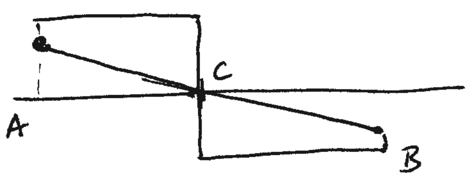
$$\Rightarrow \frac{E}{6L}\left(16A_1 + 16A_2\right)u_2 = P \Rightarrow u_2 = \frac{6PL}{E(16A_1 + 16A_2)}$$

$$u(x) = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3$$

$$u(x) = \frac{6PL}{E(16A_1+16A_2)} \times \left(-\frac{4}{L^2}x(x-L)\right)$$

$$= -\frac{24P}{EL(16A_1+16A_2)}x^2 + \frac{24P}{E(16A_1+16A_2)}x$$

A solução é quadrática, quando a exacta é linear.
Se calcularmos a força ficamos com uma distribuição linear quando devia ser constante em cada uma das partes da barra.



Logo a solução com um único elemento quadrático é pior do que com 2 lineares! (neste caso)