

# MECÂNICA E MODELAÇÃO COMPUTACIONAL

## Mestrado Integrado em Engenharia Biomédica

1ª Época

Ano Lectivo de 2009/2010

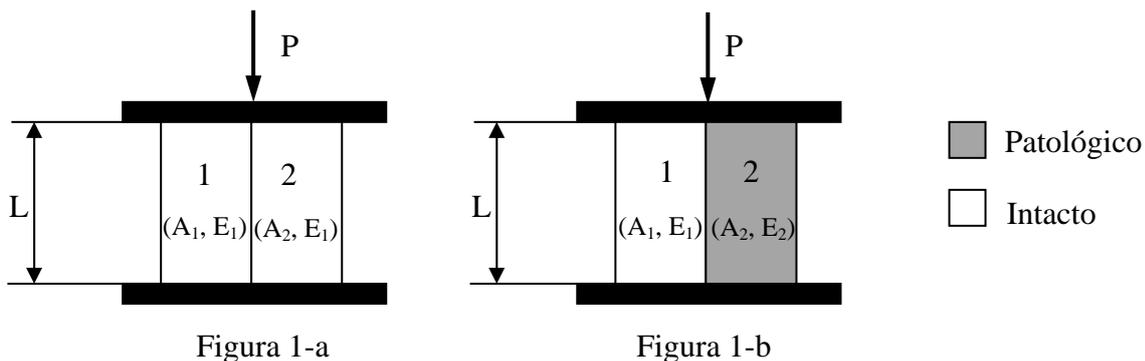
23/Janeiro/2010

- O Exame é sem consulta. O formulário está anexo a este exame.
- Não são permitidos computadores pessoais ou telemóveis.
- Todas as folhas do exame deverão ser identificadas.
- A duração do exame é de 2 horas e 30 minutos.

### Problema I (5 val.)

Considere um modelo para o corpo de uma vértebra tal como é mostrado na figura 1. A vértebra está sujeita a uma carga axial de compressão, aplicada através de placas rígidas que permanecem perfeitamente horizontais. O osso patológico (“damaged bone”) ocupa metade da área da figura 1-b, isto é,  $A_2=A_1=A/2$  e o seu módulo de Young é  $E_2=0.08E_1$ , onde  $E_1$  é o módulo do osso saudável.

- Calcule a tensão em cada região para a situação de vértebra com osso patológico em função da tensão original do osso saudável. (2 val.)
- Determine a deformação na vértebra saudável (figura 1-a) e na vértebra com osso patológico (figura 1-b) (2.val.)
- Calcule o módulo de elasticidade para uma estrutura homogénea de rigidez equivalente à vértebra patológica (figura 1-b). (1 val.)



### Problema II (5 val.)

Um tubo circular está soldado a uma placa fixa na sua extremidade direita e a uma placa rígida na sua extremidade esquerda (ver figura 2). Um veio sólido circular de diâmetro  $d_1=16$  mm, passa pelo furo da placa fixa e é soldado à placa rígida da extremidade esquerda. O tubo e o veio são concêntricos e a relação entre o diâmetro exterior ( $d_3$ ) e o diâmetro interior ( $d_2$ ) do tubo é,  $d_3=1,25d_2$ . O comprimento do veio e do tubo é de 400 mm e de 200 mm, respectivamente. Um momento torsor de 100 Nm é aplicado na extremidade A do veio. Tanto o tubo como o veio são feitos de alumínio com um módulo de rigidez transversal  $G=28$  GPa e tensão de cedência ao corte de 198 MPa.

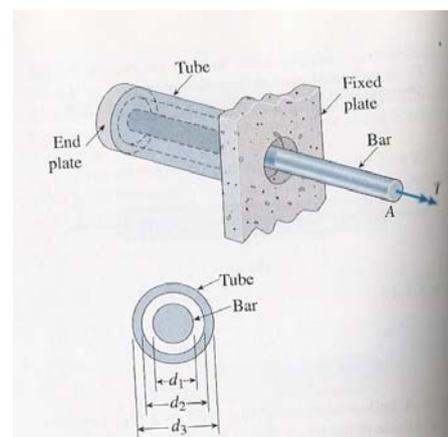


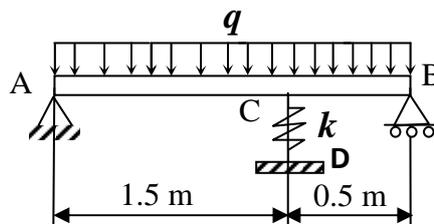
Figura 2

- Admitindo que se exige um coeficiente de segurança de 4 para o tubo, determine o seu diâmetro exterior ( $d_3$ ). (2,5 val.)
- Para um diâmetro exterior do tubo  $d_3=30$  mm e diâmetro interior  $d_2=24$  mm, determine o ângulo de torção (em radianos) na extremidade A do veio. (2,5 val.)

**Problema III (5 val.)**

Considere o esquema simplificado da estrutura de uma cama de hospital representada na figura. A viga está apoiada nas extremidades e é ainda suportada no ponto C por uma mola de rigidez  $k=2 \times 10^5 \text{ N/m}$ . O material da viga é alumínio com  $E=70\text{GPa}$ . O comprimento total da viga é  $L=2$  metros e a secção da viga é rectangular com  $I=5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ . O carregamento distribuído é de  $q=1000 \text{ N/m}$ .

- Determine as reacções nos apoios. (2,5 val.)
- Determine a equação da curva elástica para o troço AC da viga. (1,5 val.)
- Determine a deformada máxima na viga. (1,0 val.)



**Figura 3**

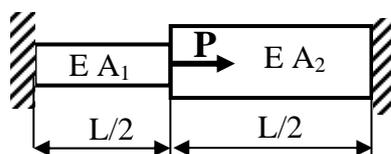
**Problema IV (5 val.)**

Considere o problema apresentado na figura 4 para o qual a equação de equilíbrio é  $\frac{d}{dx} \left( EA(x) \frac{du}{dx} \right) = 0$ . Pretende-se resolver este problema utilizando dois elementos de barra (elementos unidimensionais lineares) de igual comprimento.

- Determine a matriz global do sistema e o vector de cargas global (antes de aplicar as condições de fronteira). (2 val.)
- Imponha as condições de fronteira e determine o campo de deslocamentos. (1 val.)
- Determine a força  $F = EA(x) \frac{du}{dx}$  nos troços AC e CB da barra. (0,5 val.)
- Admita que se quer resolver este problema utilizando um elemento finito unidimensional quadrático (3 nós).
  - Indique as funções de base desse elemento (0,5 val.)
  - Obtenha o termo K11 da matriz de rigidez do elemento. (0,5 val.)
  - Admitindo que a matriz da rigidez do elemento quadrático é neste caso,

$$\frac{E}{6L} \begin{bmatrix} 13A_1 + A_2 & -14A_1 - 2A_2 & A_1 + A_2 \\ -14A_1 - 2A_2 & 16A_1 + 16A_2 & -2A_1 - 14A_2 \\ A_1 + A_2 & -2A_1 - 14A_2 & A_1 + 13A_2 \end{bmatrix},$$

determine o campo de deslocamentos e comente a solução. (0,5 val.).



**Figura 4**

## FORMULÁRIO:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta A} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$

$$\tau = \frac{P}{A_0} \cos \theta \sin \theta \quad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx} \quad \sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon_T = \alpha \Delta T \quad \delta = \frac{PL}{AE}$$

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad \delta = \int_0^L \frac{P}{AE} dx$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad \tau = \frac{T\rho}{J} \quad \phi = \frac{TL}{JG} \quad \phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \quad \phi = \int_0^L \frac{T}{JG} dx$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho} \quad \sigma_x = -\frac{My}{I} \quad \sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad \tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad \tau = \frac{VQ}{It} \quad \frac{dV}{dx} = -w$$

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w dx \quad \frac{dM}{dx} = V$$

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad F = -kx$$

$$K_{ij}^e = \int_0^{h^e} EA \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \quad F_i^e = \int_0^{h^e} f \phi_i dx \quad [K_{ij}^e] = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{F_i^e\} = \frac{f^e L^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{h^e} \quad \phi_2 = \frac{x}{h^e} \quad K_{ij}^e = \int_0^{h^e} EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx \quad F_i^e = \int_0^{h^e} q \phi_i dx$$

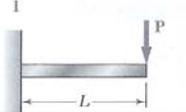
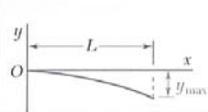
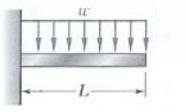
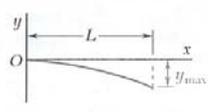
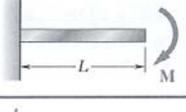
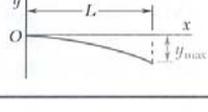
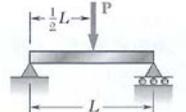
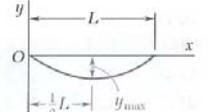
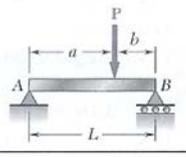
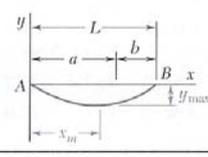
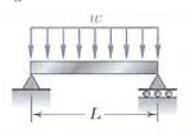
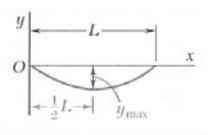
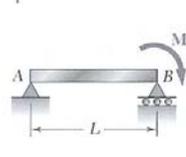
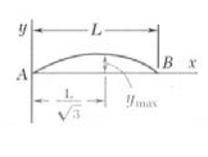
$$\phi_1 = 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{h^e}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{h^e}\right)^3 \quad \phi_2 = -\bar{x} \left(1 - \frac{\bar{x}}{h^e}\right)^2$$

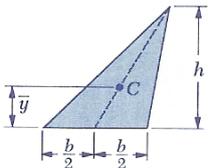
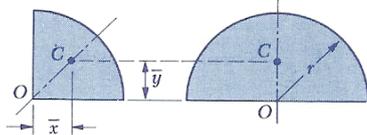
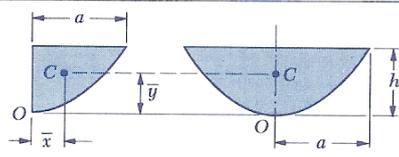
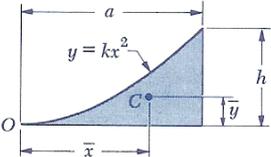
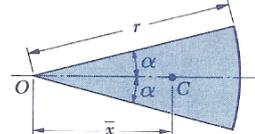
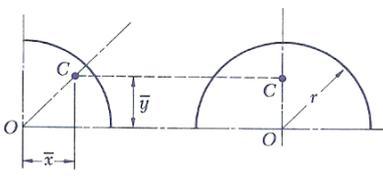
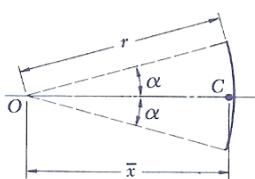
$$\phi_3 = 3\left(\frac{\bar{x}}{h^e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{h^e}\right)^3 \quad \phi_4 = -\bar{x} \left[ \left(\frac{\bar{x}}{h^e}\right)^2 - \frac{\bar{x}}{h^e} \right]$$

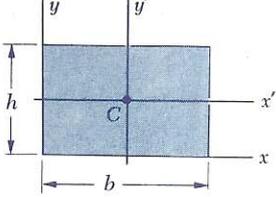
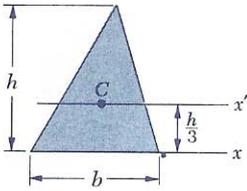
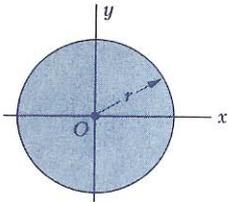
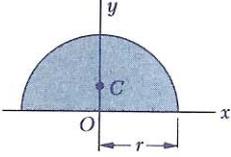
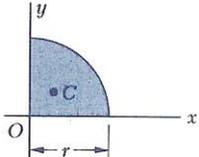
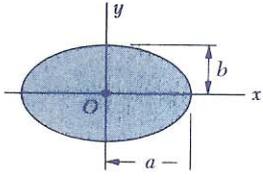
$$[K_{ij}^e] = \frac{2EI}{h_e^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h_e & -6 & -3h_e \\ -3h_e & 2h_e^2 & 3h_e & h_e^2 \\ -6 & 3h_e & 6 & 3h_e \\ -3h_e & h_e^2 & 3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix} \quad \{F_i^e\} = \frac{qh_e}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h_e \\ 6 \\ h_e \end{Bmatrix}$$

$$K_{\alpha\beta}^e = \int_{\Omega^e} k_{ij} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_j} d\Omega \quad F_\alpha^e = \int_{\Gamma_e} q \phi_\alpha d\Gamma$$

$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad \phi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad \phi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad \phi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Viga e carregamento	Linha elástica	Flexão máxima	Rotação na extremidade	Equação da linha elástica
1 		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
2 		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
3 		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y = -\frac{M}{2EI}x^2$
4 		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$\pm \frac{PL^2}{16EI}$	Para $x \leq \frac{1}{2}L$ : $y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$
5 		Para $a > b$ : $-\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ em $x_m = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$	$\theta_A = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$ $\theta_B = +\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$	Para $x < a$ : $y = \frac{Pb}{6EIL}[x^3 - (L^2 - b^2)x]$ Para $x = a$ : $y = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$
6 		$-\frac{5wL^4}{384EI}$	$\pm \frac{wL^3}{24EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$
7 		$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A = +\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ML}{3EI}$	$y = -\frac{M}{6EIL}(x^3 - L^2x)$

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Circular sector		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	$\alpha r^2$
Quarter-circular arc		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc		0	$\frac{2r}{\pi}$	$\pi r$
Arc of circle		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

<p>Rectangle</p>		$\begin{aligned} \bar{I}_{x'} &= \frac{1}{12}bh^3 \\ \bar{I}_{y'} &= \frac{1}{12}b^3h \\ I_x &= \frac{1}{3}bh^3 \\ I_y &= \frac{1}{3}b^3h \\ J_C &= \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2) \end{aligned}$
<p>Triangle</p>		$\begin{aligned} \bar{I}_{x'} &= \frac{1}{36}bh^3 \\ I_x &= \frac{1}{12}bh^3 \end{aligned}$
<p>Circle</p>		$\begin{aligned} \bar{I}_x &= \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4 \\ J_O &= \frac{1}{2}\pi r^4 \end{aligned}$
<p>Semicircle</p>		$\begin{aligned} I_x &= I_y = \frac{1}{8}\pi r^4 \\ J_O &= \frac{1}{4}\pi r^4 \end{aligned}$
<p>Quarter circle</p>		$\begin{aligned} I_x &= I_y = \frac{1}{16}\pi r^4 \\ J_O &= \frac{1}{8}\pi r^4 \end{aligned}$
<p>Ellipse</p>		$\begin{aligned} \bar{I}_x &= \frac{1}{4}\pi ab^3 \\ \bar{I}_y &= \frac{1}{4}\pi a^3b \\ J_O &= \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2) \end{aligned}$