MECÂNICA COMPUTACIONAL
Licenciatura em Engenharia Biomédica

1ª Época | Ano Lectivo de 2006/2007 | 3/Julho/2006

- O Exame é sem consulta. O formulário está anexo a este exame.
- Não são permitidos computadores pessoais ou telemóveis.
- Todas as folhas do exame deverão ser identificadas.
- A duração do exame é de 2 horas e 30 minutos.

Problema I (4,5 val.)

A figura 1 representa uma parte de osso da mandíbula e a figura 2 representa a mesma mandíbula após a inserção de um implante dentário. Sabendo que a força de mastigação é 110 N, e que os módulos de Young do osso e implante são respectivamente E_{osso}=10GPa e E_{imp}=100GPa determine:

a) A tensão normal no osso antes do implante. (0,5 val.)
b) A tensão normal no osso depois do implante. (1,5 val.)
c) A deformação axial do osso antes do implante. (1,0 val.)
d) A deformação axial do osso depois do implante. (1,0 val.)
e) Sabendo que a tensão e/ou deformação são estímulos mecânicos essenciais para a manutenção da massa de osso, comente os resultados obtidos. (0,5 val.)

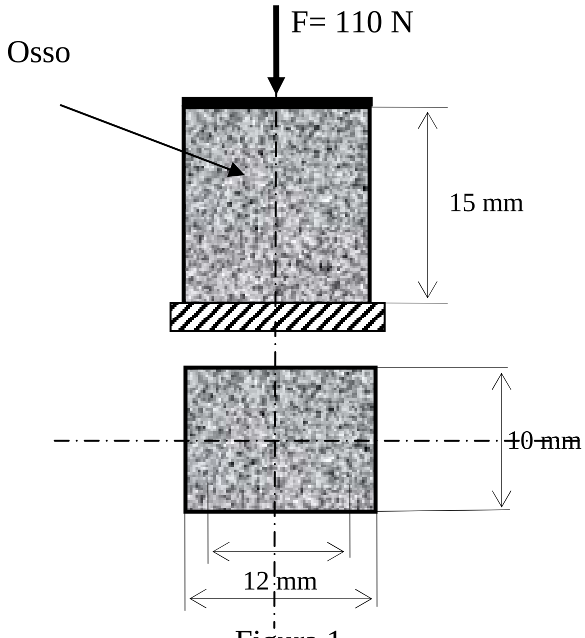


Figura 1

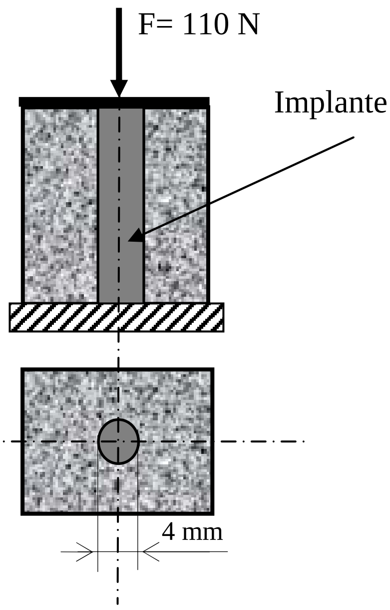


Figura 2

Problema II (4,5 val.)

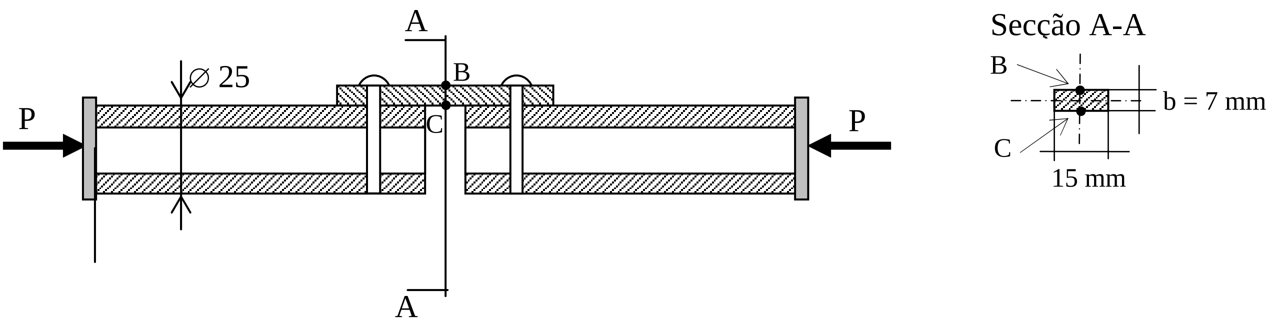
Flexão na placa de osteossintese

Considere um troço de osso longo no qual se colocou uma placa de osteossíntese de modo a estabilizar uma fractura. Admitindo que o osso está sujeito a esforço axial de P = 1000 N como mostra a figura determine:

a) A tensão no ponto B da placa de osteossíntese (secção A-A). (1,5 val.)

b) A tensão no ponto C da placa de osteossíntese (secção A-A). (1,5 val.)

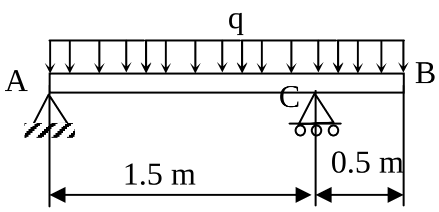
c) Se a placa de osteossíntese for fabricada com um material cuja tensão admissível seja 200 MPa, determine a altura mínima da placa (dimensão b). Admita que a tensão admissível à tracção e à compressão são iguais. (1,5 val.)



Problema III (6 val.)

Considere um estrado de uma cama de hospital, modelado como uma viga feita de alumínio (E= 70 GPa), com os apoios na posição indicada, como mostra a figura. O comprimento do estrado é L= 2 metros e a secção tem um momento de inércia de I= 45×10^{-8} m^4. O carregamento distribuído é de q=600 N/m.

a) Calcule as reacções nos apoios. (1 val.)
b) Trace os diagramas de esforço transverso e momento flector. (2 val)
c) Escreva a equação da curva elástica. (2,.5 val.)
d) Determine a deformada no ponto B. (1 val.)



Problema IV (5 val.)

Pretende-se resolver o problema III utilizando o método dos elementos finitos.

a) Indique justificando que tipo de elemento utilizaria e qual o menor número de elementos necessário para resolver o problema. (1 val.)
b) Determine a matriz global do sistema (antes das condições de fronteira). (1 val.)
c) Determine o vector de cargas global. (1 val.)
d) Imponha as condições de fronteira e determine o deslocamento vertical no ponto B. (1 val.)
e) Comente a precisão da solução obtida para o diagrama de momento flector pelo Método dos Elementos Finitos. (1 val.)

FORMULÁRIO:

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \qquad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta A} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$$

$$\tau = \frac{P}{A_0}\cos\theta\sin\theta \qquad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx} \quad \sigma = E\varepsilon \qquad \varepsilon_T = \alpha\Delta T \qquad \delta = \frac{PL}{AE}$$

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \qquad \delta = \int_0^L \frac{P}{AE}dx$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad \tau = \frac{T\rho}{J} \qquad \phi = \frac{TL}{JG} \qquad \phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \qquad \phi = \int_0^L \frac{T}{JG}dx$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho} \qquad \sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \qquad \tan\phi = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \qquad \frac{dV}{dx} = -w \qquad V_D - V_c = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx$$

$$\frac{dM}{dx} = V \qquad M_D - M_c = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$K_{ij}^e = \int_0^{h^e} EA\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}dx \qquad F_i^e = \int_0^{h^e} f\phi_i dx \quad \left[K_{ij}^e\right] = \frac{E^e A^e}{L^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left\{F_i^e\right\} = \frac{f^e L^e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{h^e} \qquad \phi_2 = \frac{x}{h^e} \qquad K_{ij}^e = \int_0^{h^e} EI\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx \qquad F_i^e = \int_0^{h^e} q\phi_i dx$$

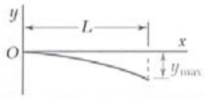
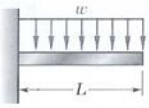
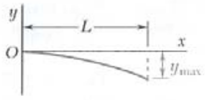
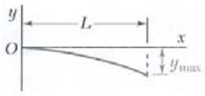
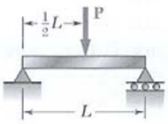
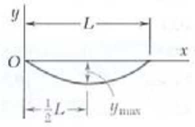
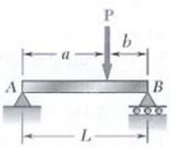
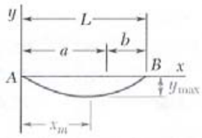
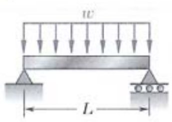
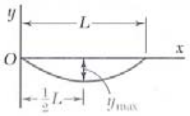
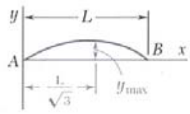
$$\phi_1 = 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{h^e}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{h^e}\right)^3 \qquad \phi_2 = -\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{h^e}\right)^2$$

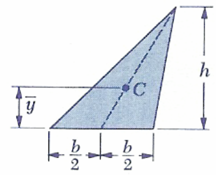
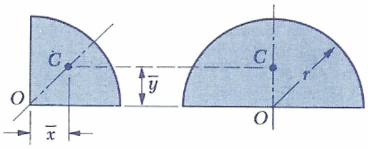
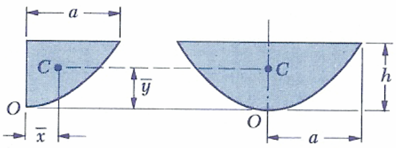
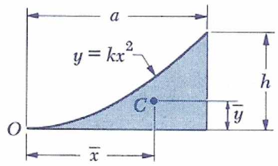
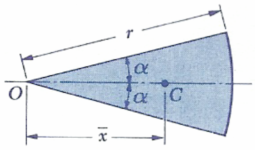
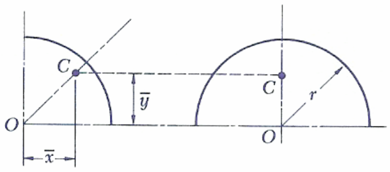
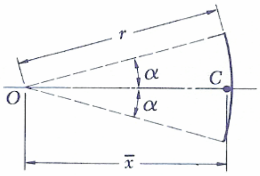
$$\phi_3 = 3\left(\frac{\bar{x}}{h^e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{h^e}\right)^3 \qquad \phi_4 = -\bar{x}\left[\left(\frac{\bar{x}}{h^e}\right)^2 - \frac{\bar{x}}{h^e}\right]$$

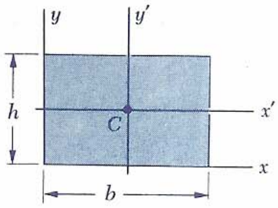
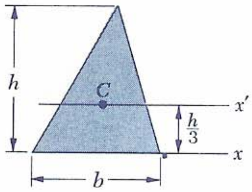
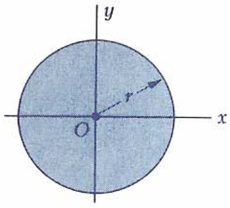
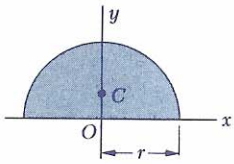
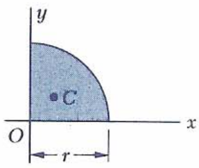
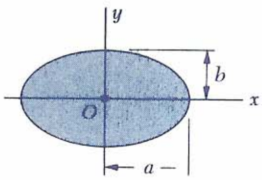
$$\left[K_{ij}^e\right] = \frac{2EI}{h_e^3}\begin{bmatrix} 6 & -3h_e & -6 & -3h_e \\ -3h_e & 2h_e^2 & 3h_e & h_e^2 \\ -6 & 3h_e & 6 & 3h_e \\ -3h_e & h_e^2 & 3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix} \qquad \left\{F_i^e\right\} = \frac{qh_e}{12}\begin{Bmatrix} 6 \\ -h_e \\ 6 \\ h_e \end{Bmatrix}$$

$$K_{\alpha\beta}^e = \int_{\Omega^e} k_{ij}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial x_j}d\Omega \qquad F_\alpha^e = \int_{\Gamma_e} q\phi_\alpha d\Gamma$$

$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad \phi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad \phi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad \phi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Viga e carregamento	Linha elástica	Flecha máxima	Rotação na extremidade	Equação da linha elástica
1 		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y=\frac{P}{6EI}(x^3-3Lx^2)$
2 		$-\frac{pL^4}{8EI}$	$-\frac{pL^3}{6EI}$	$y=-\frac{p}{24EI}(x^4-4Lx^3+6L^2x^2)$
3 		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y=-\frac{M}{2EI}x^2$
4 		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$\pm\frac{PL^2}{16EI}$	Para $x \le \frac{1}{2}L$: $y=\frac{P}{48EI}(4x^3-3L^2x)$
5 		Para $a > b$: $-\frac{Pb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ em $x_m=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$	$\theta_A=-\frac{Pb(L^2-b^2)}{6EIL}$ $\theta_B=+\frac{Pa(L^2-a^2)}{6EIL}$	Para $x < a$: $y=\frac{Pb}{6EIL}[x^3-(L^2-b^2)x]$ Para $x = a$: $y=-\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$
6 		$-\frac{5pL^4}{384EI}$	$\pm\frac{pL^3}{24EI}$	$y=-\frac{p}{24EI}(x^4-2Lx^3+L^3x)$
7 		$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A=+\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B=-\frac{ML}{3EI}$	$y=-\frac{M}{6EIL}(x^3-L^2x)$

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Circular sector		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Quarter-circular arc		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arc of circle		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Rectangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Circle		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicircle		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Quarter circle		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Ellipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$