

MECÂNICA COMPUTACIONAL
Licenciatura em Engenharia Biomédica

1ª Época

Ano Lectivo de 2005/2006

3/Julho/2006

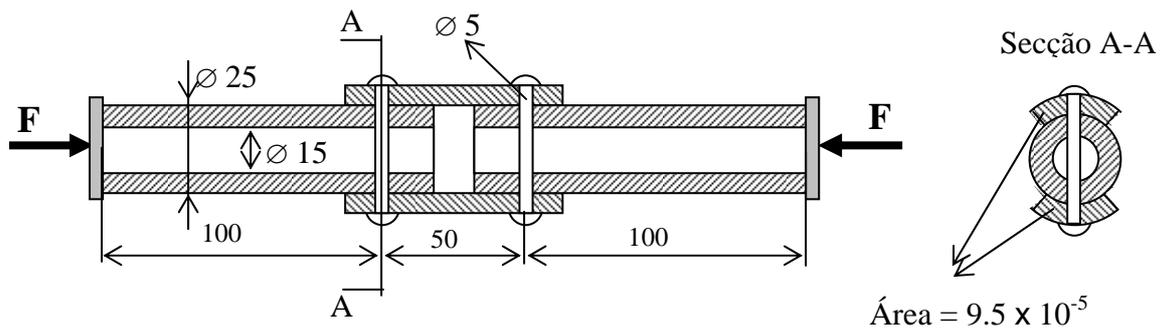
- O Exame é sem consulta. O formulário está anexo a este exame.
- Não são permitidos computadores pessoais ou telemóveis.
- Todas as folhas do exame deverão ser identificadas.
- A duração do exame é de 2 horas e 30 minutos.

Problema I (5 val.)

A figura representa a diáfise de um osso longo onde se colocou placas de osteossíntese. Admita que o esforço predominante é axial e corresponde a uma força F de 1000 N aplicada como mostra a figura. Considere o módulo de Young para o osso de 20 GPa, e para as placas de 200 GPa. Determine:

- a) A tensão normal no osso.
- b) A tensão normal de cada uma das placas de osteossíntese
- c) A tensão de corte nos pinos de ligação.
- d) A deformação axial das placas de osteossíntese.

Nota: As dimensões na figura estão em milímetros.

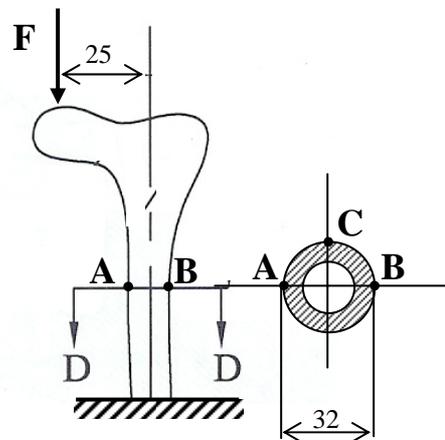


Problema II (4 val.)

Considere o fémur representado na figura sujeito a uma força vertical de $F=1000 \text{ N}$, cuja linha de acção passa pelo eixo que contém os pontos A e B. Utilizando um método experimental (extensometria) determinou-se a tensão no ponto A. Esta tensão é de compressão e vale 11.2 MPa. Determine:

- a) A espessura do osso compacto na secção AB
- b) A tensão normal no ponto B
- c) A tensão normal no ponto C

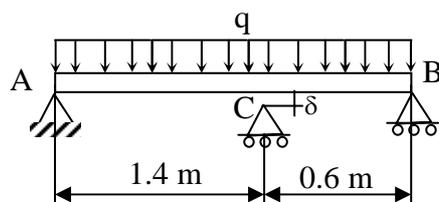
Nota: As dimensões na figura estão em milímetros. No caso de não ter determinado a espessura em a), considere o diâmetro interior igual a 20 mm.



Problema III (6 val.)

Considere um estrado de uma cama de hospital, modelado como uma viga feita de alumínio ($E= 70 \text{ GPa}$), com um reforço intermédio, que na situação sem carregamento está a uma distância $\delta = 10 \text{ mm}$, como mostra a figura. O comprimento do estrado é $L= 2 \text{ metros}$ e a secção tem um momento de inércia de $I= 45 \times 10^{-9} \text{ m}^4$. O carregamento distribuído é de $q=600 \text{ N/m}$ e a carga concentrada.

- Calcule as reacções nos apoios.
- Escreva a equação da curva elástica e determine a deformada a meio do estrado.
- Trace o diagrama de esforço transverso e momento flector.



Problema IV (5 val.)

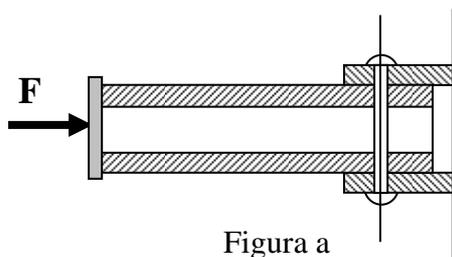


Figura a

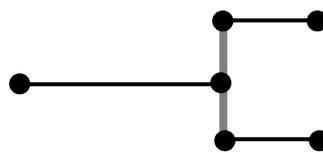


Figura b

Pretende-se resolver o problema I utilizando o método dos elementos finitos. Para tal considerou-se a simetria do problema conforme mostra a figura a, e modelou-se o problema utilizando uma discretização de 3 elementos finitos lineares unidimensionais (figura b). O pino de ligação foi considerado rígido.

- Determine a matriz de rigidez de cada elemento.
- Determine a matriz global do problema antes de considerar as condições de fronteira.
- Construa o vector de forças global.
- Enuncie as condições de fronteira e escreva o sistema global a resolver.
- Calcule a variação de comprimento das placas de osteossíntese.

NOTA: Utilizar os dados do problema 1.

FORMULÁRIO:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta A} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta$$

$$\tau = \frac{P}{A_0} \cos \theta \sin \theta \quad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx} \quad \sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon_T = \alpha \Delta T \quad \delta = \frac{PL}{AE}$$

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad \delta = \int_0^L \frac{P}{AE} dx$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} \quad \tau = \frac{T\rho}{J} \quad \phi = \frac{TL}{JG} \quad \phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \quad \phi = \int_0^L \frac{T}{JG} dx$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho} \quad \sigma_x = -\frac{My}{I} \quad \sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad \tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad \frac{dV}{dx} = -w \quad V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w dx$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$K_{ij}^e = \int_0^{h^e} EA \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx \quad F_i^e = \int_0^{h^e} f \phi_i dx \quad [K_{ij}^e] = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \{F_i^e\} = \frac{f^e L^e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{h^e} \quad \phi_2 = \frac{x}{h^e} \quad K_{ij}^e = \int_0^{h^e} EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx \quad F_i^e = \int_0^{h^e} q \phi_i dx$$

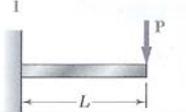
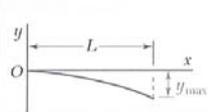
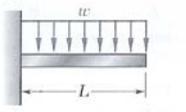
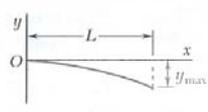
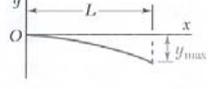
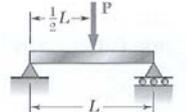
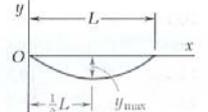
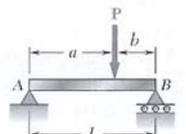
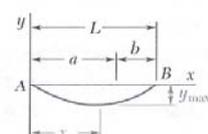
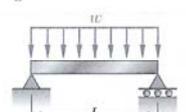
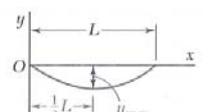
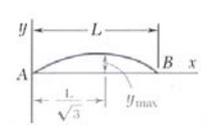
$$\phi_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{h^e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h^e}\right)^3 \quad \phi_2 = x\left(1 - \frac{x}{h^e}\right)^2$$

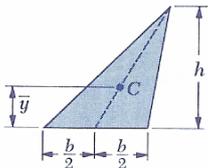
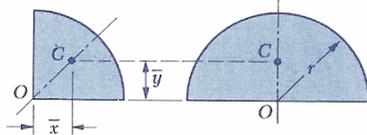
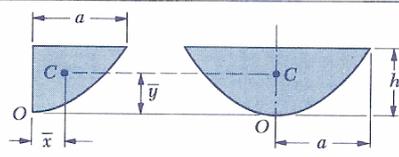
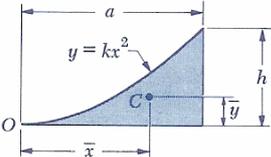
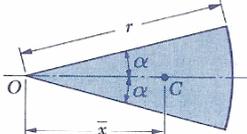
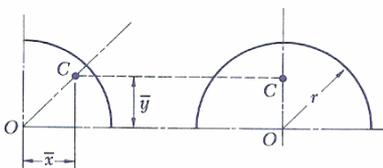
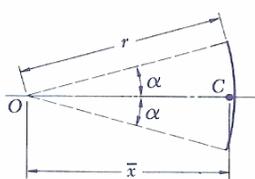
$$\phi_3 = 3\left(\frac{x}{h^e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h^e}\right)^3 \quad \phi_4 = x\left[\left(\frac{x}{h^e}\right)^2 - \frac{x}{h^e}\right]$$

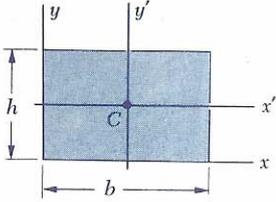
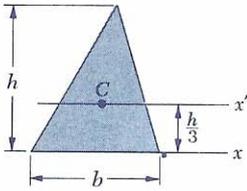
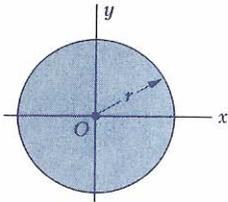
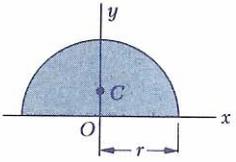
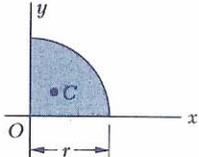
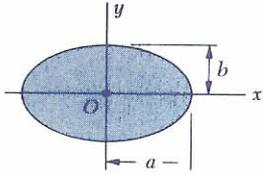
$$[K_{ij}^e] = \frac{2EI}{h_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3h_e & -6 & 3h_e \\ 3h_e & 2h_e^2 & -3h_e & h_e^2 \\ -6 & -3h_e & 6 & -3h_e \\ 3h_e & h_e^2 & -3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix} \quad \{F_i^e\} = \frac{qh_e}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ h_e \\ 6 \\ -h_e \end{Bmatrix}$$

$$K_{\alpha\beta}^e = \int_{\Omega^e} k_{ij} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_j} d\Omega \quad F_\alpha^e = \int_{\Gamma^e} q \phi_\alpha d\Gamma$$

$$\phi_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad \phi_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad \phi_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad \phi_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Viga e carregamento	Linha elástica	Flexão máxima	Rotação na extremidade	Equação da linha elástica
		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
		$-\frac{pL^4}{8EI}$	$-\frac{pL^3}{6EI}$	$y = -\frac{P}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y = -\frac{M}{2EI}x^2$
		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$\pm \frac{PL^2}{16EI}$	Para $x \leq \frac{1}{2}L$: $y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$
		Para $a > b$: $-\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ em $x_m = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$	$\theta_A = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6EIL}$ $\theta_B = +\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6EIL}$	Para $x < a$: $y = \frac{Pb}{6EIL}[x^3 - (L^2 - b^2)x]$ Para $x = a$: $y = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL}$
		$-\frac{5pL^4}{384EI}$	$\pm \frac{pL^3}{24EI}$	$y = -\frac{P}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$
		$\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_A = +\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ML}{3EI}$	$y = -\frac{M}{6EIL}(x^3 - L^2x)$

Shape		\bar{x}	\bar{y}	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Circular sector		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Quarter-circular arc		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arc of circle		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Rectangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Circle		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicircle		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Quarter circle		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Ellipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$